Aufgabe 3

Sei $f_{n_1},\dots,f_{n_r}$ eine endliche Teilmenge der f_n, $n \in \mathbb{Z}$, wobei wir o.E. $n_1 < n_2 < \dots < n_r$ annehmen (ansonsten eben umbenennen).

Seien nun $\lambda_1,\dots,\lambda_r \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_{n_i} = 0 \quad \in \quad \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}),$$

d.h. es gilt

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_{n_i}(x) = 0 \in \mathbb{R}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wähle $x_1 \in (n_1, n_2)$. Dann erhalten wir

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \underbrace{f_{n_i}(x_1)}_{\substack{= 0 \text{ für } 2 \le i \le r \\ = 1 \text{ für } i = 1}} = \lambda_1$$

Wähle nun $x_2 \in (n_2, n_3)$. Dann gilt

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\lambda_i}_{\substack{=0 \\ \text{für } i=1}} \underbrace{f_{n_i}(x_2)}_{\substack{= 0 \text{ für } 3 \le i \le r \\ = 1 \text{ für } i = 2}} = \lambda_2$$

Setzen wir dies so fort, erhalten wir also

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0.$$

Somit ist das Tupel $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ linear unabhängig. Es ist kein Erzeugendensystem, denn für jede* Linearkombination

$$f = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_{n_i}$$

der f_n's findet sich ein $x \in \mathbb{R}$ (nämlich einfach ein beliebiges $x < \{n_1,\dots,n_r\}$), sodass $f(x) = 0$. Es gibt aber natürlich Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ohne diese Eigenschaft, wie z.B. $1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$.

Aufgabe 4

(a)

Ja, z.B die Verkettung

$$p : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{pr_{1,2}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{i_{1,2}} \mathbb{R}^3 ,$$

$$(x,y,z) \mapsto (x,y)$$

$$(x,y) \mapsto (x,y,0)$$

denn es gilt

$$(p \circ p)(x,y,z) = p(x,y,0) = (x,y,0) = p(x,y,z)$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(b)

Sei $v \in V$. Da

$$(p \circ p)(v) = p(v),$$

erhalten wir

$$0 = p(v) - (p \circ p)(v) = p(v - p(v))$$

und somit

$$v - p(v) \in \ker(p).$$

Also

$$v = \underbrace{v - p(v)}_{\in \ker(p)} + \underbrace{p(v)}_{\in \operatorname{im}(p)} \in \ker(p) + \operatorname{im}(p),$$

sodass $V = \ker(p) + \operatorname{im}(p)$.

Sei nun $v \in \ker(p) \cap \operatorname{im}(p)$; es ex. also ein $w \in V$ mit $p(w) = v$ und es gilt $p(v) = 0$. Daher

$$v = p(w) = (p \circ p)(w) = p(v) = 0$$

und somit $\ker(p) \cap \operatorname{im}(p) = \{0\}$.

Wie in der Aufgabe bereits er- wähnt folgt also $V = \ker(p) \oplus \operatorname{im}(p)$